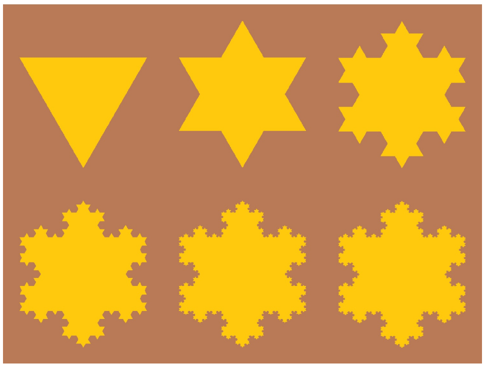
# Kochs Kurve

*Jacob Nielsen*



Kurven er oprindelig præsenteret af den svenske matematiker Helge von Koch i 1904 som et eksempel på en kurve, der ikke har en tangent i noget punkt.

Kurven konstrueres iterativt - det vil sige ved at gentage en fast procedure. Først konstrueres en ligesidet trekant. En ny ligesidet trekant konstrueres på hver af den oprindelige trekants sider. Den nye trekant har den midterste tredjedel af den oprindelige trekants side som den ene side.

Vi skal nedenfor regne på, hvordan kurvens længde vokser, når skalaen gøres mindre. Med skala menes i denne forbindelse sidelængden i den mindste trekant.

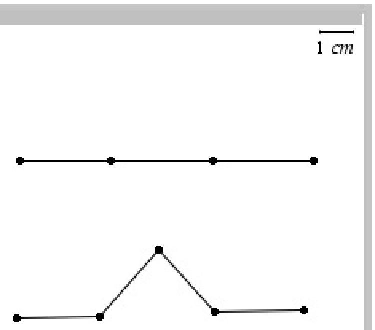
I hvert trin af den iterative konstruktion forlænges sidelængden med en faktor 4/3. Efter et trin består en side nu af fire stykker, som den forgående side havde tre af.

Længden af kurven er i første trin 3, næste trin $3*\frac{4}{3}$ = 4, næste trin igen $4*\frac{4}{3}$ osv.

Hvis vi sætter første skala lig med en, så bliver følgen af skalaer:

$$1;\ \frac{1}{3};\ \left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{3}\right)^3,\ldots\ldots,\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Længden af kurven er i første trin 3, næste trin $3*\frac{4}{3}$ = 4, næste trin igen $4*\frac{4}{3}$ osv.



Vi skal nu undersøge den funktion, der beskriver længden som funktion af skalaen s nærmere. Fra forgående side har vi:

$L(1) = 3$

$L(\frac{1}{3}) = 4$

$L\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 3*\left(\frac{4}{3}\right)^n$

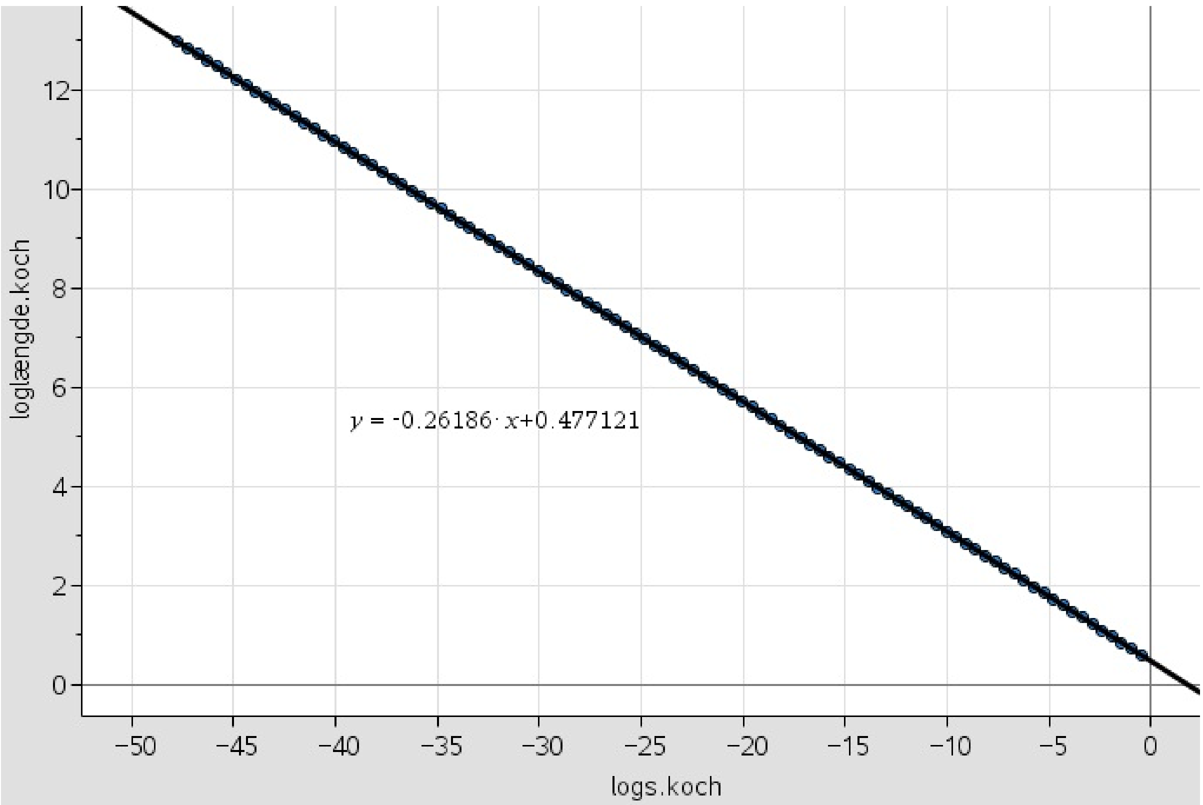
Følgen af længder, der fremkommer i denne íterative proces er opskrevet i tabellen på næste side og afbildet i diagrammet nedenfor. Den dobbeltlogaritmiske afbilding bliver med god tilnærmelse en ret linje, så L(s) må være en potensfunktion.

$L(s) = b*s^a$

$\log(L(s)) = a*\log(s) + b$

Potensen a er således hældningen af linjen i det dobbeltlogaritmiske plot. Lineær regression giver:

a = −0,26186



Den fraktale dimension D er defineret ved, at $a=1-D$.

Nu beregnes den teoretiske værdi af D.

En potensfunktion har egenskaben:

$f(k*x) = b*(kx)^a = b*x^a*k^a = k^a*f(x)$

I vores eksempel er k = 1/3 og $k^a$ = 4/3

Vi får altså ligningen:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a = 4/3 \Leftrightarrow a = \frac{\log(4/3)}{\log(1/3)} = -0{,}26186$$

Det stemmer fint med vores tidligere beregninger.

$a = -0{,}26186 \wedge a = 1-D \Leftrightarrow D = 1-a = 1-(-0{,}26186) = 1{,}26186.$

Normalt tager vi ikke hensyn til, at længden af en kurve afhænger af skalaen. I dette tilfælde gælder der:

$L(s) = \text{konstant.} \Leftrightarrow L(s) = k*s^{1-d} = k \Leftrightarrow s^{1-D} = 1 \Leftrightarrow 1-D = 0 \Leftrightarrow D = 1$

Vi plejer også at sige, at dimensionen af en kurve er en.

Kochs kurve har altså en dimension, der er større en dimensionen af almindelige kurver men mindre end dimensionen af af et areal, der er lig med to. Kurvens længde vokser, når skalaen gøres mindre, men kurven får aldrig et areal forskelligt fra nul.